GEOMETRÍA ANALÍTICA

PRIMER PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Implica que: "dada una ecuación, se debe interpretar geométricamente o construir su gráfica".

Discutir la ecuación:

1) INTERSECCIONES
   a. Intersecciones con el eje "x" cuando y=0.
   b. Intersecciones con el eje "y" cuando x=0.
2) SIMETRÍA
   a. Con respecto al eje "x": reemplazar "y" por "-y".
   b. Con respecto al eje "y": reemplazar "x" por "-x".
   c. Con respecto al origen: reemplazar "x" por "-x" y "y" por "-y".
3) EXTENSIÓN
   a. Dominio: despejar "y" y analizar.
   b. Rango: despejar "x" y analizar.
4) ASÍNTOTAS
   a. Asíntotas verticales, despejamos "y" y analizar denominador.
   b. Asíntotas horizontales, despejamos "x" y analizar denominador.
5) TABULAR
6) GRAFICAR

GEOMETRÍA ANALÍTICA

EJEMPLO: Discutir la siguiente ecuación y trace la gráfica correspondiente.

$$xy-y-1=0$$

SOLUCIÓN:

1) INTERSECCIONES CON EL EJE:

a. Intersecciones con el eje "x" si y=0:

$$x(0)-(0)-1=0$$

$$-1=0$$

NO existe intersección con el eje "x".

b. Intersecciones con el eje "y" si x=0:

$$(0)y-y-1=0$$

$$-y-1=0$$

$$y=-1$$

Existe una intersección con el eje "y".

2) SIMETRÍA:

a. Con respecto al eje "x" - reemplazar "y" por "-y" :

$$x(-y)-(-y)-1=0$$

$$-xy+y-1=0$$

La ecuación se alteró, por lo tanto la curva no es simétrica con respecto al eje "x".

b. Con respecto al eje "y" - reemplazar "x" por "-x" :

$$(-x)y-y-1=0$$

$$-xy-y-1=0$$

La ecuación se alteró, por lo tanto la curva no es simétrica con respecto al eje "y".

c. Con respecto al origen - reemplazar "x" por "-x" y "y" por "-y" :

$$(-x)(-y)-(-y)-1=0$$

$$xy+y-1=0$$

La ecuación se alteró, por lo tanto la curva no es simétrica con respecto al origen.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

3) EXTENSIÓN DE LA CURVA:

a. Para determinar el dominio, despejamos "y" :

$$xy - y - 1 = 0$$

$$y(x-1) - 1 = 0$$

$$y(x-1) = 1$$

$$y = \frac{1}{(x-1)}$$

El dominio es: $\{x \mid x \in \mathbb{R}\ ;\ x \neq 1\}$

b. Para determinar el rango, despejamos "x" :

$$xy - y - 1 = 0$$

$$xy = y + 1$$

$$x = \frac{y+1}{y}$$

El rango es: $\{y \mid y \in \mathbb{R}\ ;\ y \neq 0\}$

4) ASÍNTOTAS:

a. Asíntotas verticales: despejamos "y" :

$$xy - y - 1 = 0$$

$$y(x-1) - 1 = 0$$

$$y(x-1) = 1$$

$$y = \frac{1}{(x-1)}$$

Asíntota:
x-1=0
x=1

Existe una asíntota vertical cuando x=1.

b. Asíntotas horizontales, despejamos "x" :

$$xy - y - 1 = 0$$

$$xy = y + 1$$

$$x = \frac{y+1}{y}$$

Asíntota:
y=0

Existe una asíntota horizontal cuando y=0 .

GEOMETRÍA ANALÍTICA

KNOWLEDGE FOR THE WORLD
TEXAN GLOBAL SCHOOL
Global Online Learning

SOLUCIÓN:

5) TABULACIÓN:

Despejando "y" :

$$xy - y - 1 = 0$$

$$y(x-1) - 1 = 0$$

$$y(x-1) = 1$$

$$y = \frac{1}{(x-1)}$$

Proponiendo valores de "x" para tabular en el dominio:

$D=\{x \mid x \in \mathbb{R};\ x \neq 1\}$

x	$y = \frac{1}{(x-1)}$	y
-3	$y = \frac{1}{(-3-1)} = -\frac{1}{4}$	-0.25
-2	$y = \frac{1}{(-2-1)} = -\frac{1}{3}$	-0.333333333
-1	$y = \frac{1}{(-3-1)} = -\frac{1}{4}$	-0.5
0	$y = \frac{1}{(0-1)} = -1$	-1
0.5	$y = \frac{1}{(0.5-1)} = -\frac{1}{0.5}$	-2
0.6	$y = \frac{1}{(0.6-1)} = -\frac{1}{0.4}$	-2.5
0.7	$y = \frac{1}{(0.7-1)} = -\frac{1}{0.3}$	-3.333333333
0.8	$y = \frac{1}{(0.8-1)} = -\frac{1}{0.2}$	-5
0.9	$y = \frac{1}{(0.9-1)} = -\frac{1}{0.1}$	-10
1	$y = \frac{1}{(1-1)} = \frac{1}{0} = \nexists$	$\nexists$

1.1	$y = \frac{1}{(1.1-1)} = \frac{1}{0.1}$	10
1.2	$y = \frac{1}{(1.2-1)} = \frac{1}{0.2}$	5
1.3	$y = \frac{1}{(1.3-1)} = \frac{1}{0.3}$	3.333333333
1.4	$y = \frac{1}{(1.4-1)} = \frac{1}{0.4}$	2.5
1.5	$y = \frac{1}{(1.5-1)} = \frac{1}{0.5}$	2
1.6	$y = \frac{1}{(1.6-1)} = \frac{1}{0.6}$	1.666666667
1.7	$y = \frac{1}{(1.7-1)} = \frac{1}{0.7}$	1.428571429
1.8	$y = \frac{1}{(1.8-1)} = \frac{1}{0.8}$	1.25
1.9	$y = \frac{1}{(1.9-1)} = \frac{1}{0.9}$	1.111111111
2	$y = \frac{1}{(2-1)} = \frac{1}{1}$	1
3	$y = \frac{1}{(3-1)} = \frac{1}{2}$	0.5

Asíntota:
x-1=0
x=1

YouTube TikTok www.texanglobalschool.com

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SOLUCIÓN:

6) GRAFICAR:

Despejando "y" :

$$xy - y - 1 = 0$$

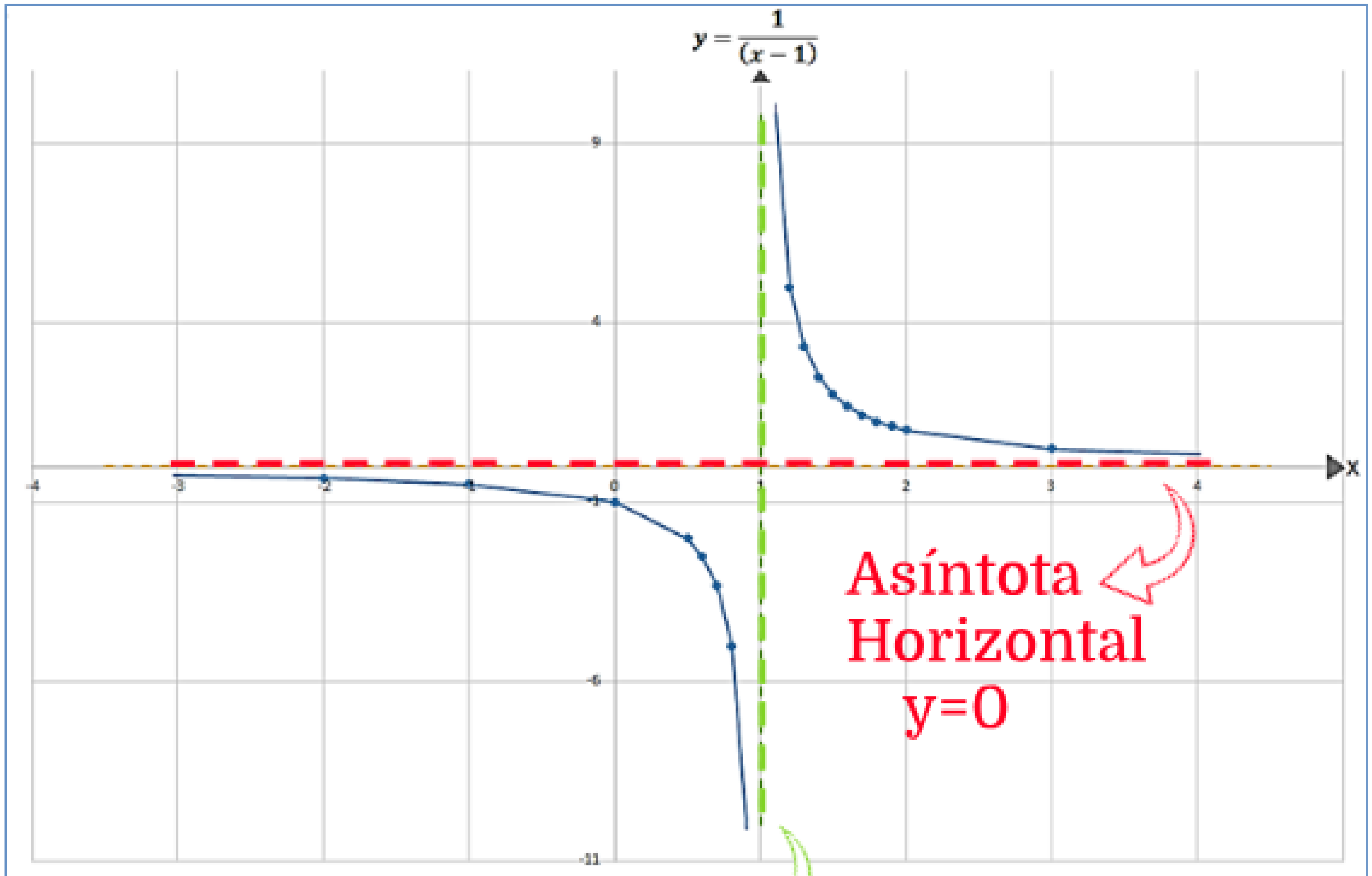
$$y(x-1) - 1 = 0$$

$$y(x-1) = 1$$

$$y = \frac{1}{(x-1)}$$

Dominio:

$D=\{x \mid x \in \mathbb{R};\ x \neq 1\}$



Asíntota
Vertical
x=1

El rango es: $C=\{y \mid y \in \mathbb{R};\ y \neq 0\}$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEGUNDO PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Implica que: "dada una figura geométrica o la condición que deben cumplir sus puntos, se determine la ecuación".

- ✓ 1) Proponer un punto P(x,y) cualquiera del lugar geométrico que satisfaga la condición o condiciones dadas.
- ✓ 2) Expresar analíticamente la condición o condiciones geométricas dadas por medio de una ecuación o ecuaciones en las coordenadas de las variables "x" y "y".
- ✓ 3) Desarrollar o simplificar la ecuación o ecuaciones a la forma f(x,y)=0 (ecuación del lugar geométrico).

GEOMETRÍA ANALÍTICA

EJEMPLO: Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que siempre equidista de dos puntos dados A(-1,1) y B(2,-1).

SOLUCIÓN:

1) Sea P(x,y) un punto cualquiera del lugar geométrico que satisfaga la condición:

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

2) Expresando analíticamente la condición; usaremos:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Entonces:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\overline{PA} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$$

Sustituyendo en la condición dada:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$$

Desarrollando:

$$\left(\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}\right)^2$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = -y^2 + 2y - 1 + y^2 + 2y + 1$$

$$6x - 3 = 4y$$

$$6x - 4y - 3 = 0$$

Si graficamos la ecuación, podemos ver que el punto se mueve en línea recta dado que la distancia entre A y B es la misma (equidista).

GEOMETRÍA ANALÍTICA

KNOWLEDGE FOR THE WORLD
TEXAN
GLOBAL SCHOOL
Global Online Learning

GRAFICANDO: 6x-4y-3= 0

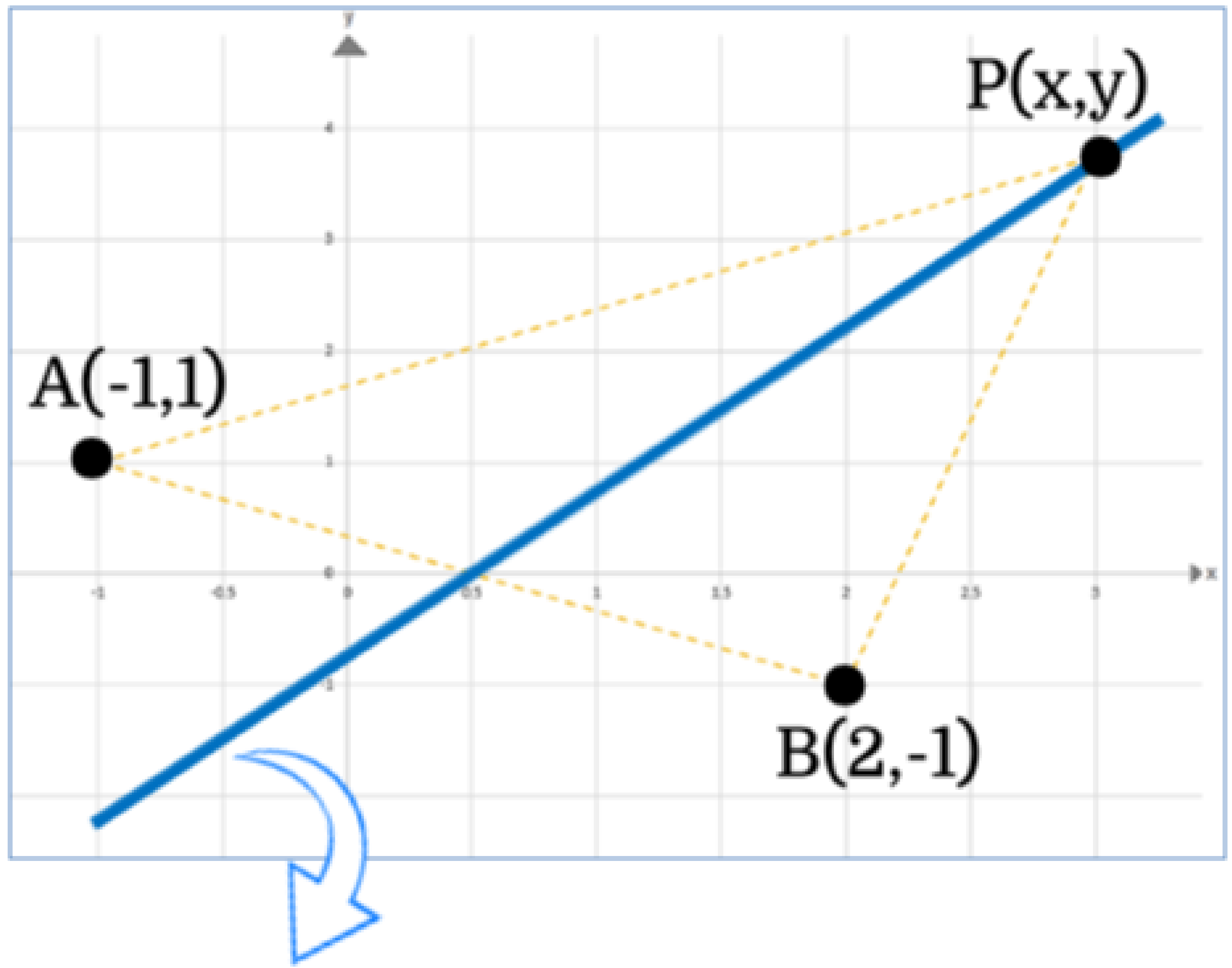
a) Despejando "y" :

$$6x - 4y - 3 = 0$$
$$-4y - 3 = -6x$$
$$-4y = -6x + 3$$
$$y = \frac{6x-3}{4}$$

b) Tabulando :

x	$y = \frac{6x-3}{4}$
-1	$y = \frac{6(-1)-3}{4} = -2.25$
3	$y = \frac{6(3)-3}{4} = 3.75$

c) Graficando :



6x-4y-3= 0